

SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO - PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
4 SETTEMBRE 2017

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Esercizio 1. In un'urna ci sono 100 palline, alcune bianche, le altre nere. Si sa che:

- il numero delle palline bianche è maggiore o uguale di quello delle nere;
 - se si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna, la probabilità che siano entrambe dello stesso colore è uguale a quella che siano di colore diverso.
- Determinare il numero delle palline bianche.
 - Se si sostituisce a 100 un intero N , discutere il problema precedente al variare di N .

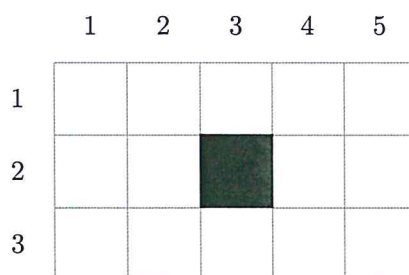
Esercizio 2. Nick ha un orologio con le lancette, con le ore regolarmente numerate da 1 a 12, a cui tiene molto. Il suo amico Brigante, per scherzo, sostituisce numero e tipo degli ingranaggi in modo tale che ogni lancetta continui a muoversi con velocità angolare costante ma, ahinoi, sconosciuta.

Per capire la velocità delle due lancette, Nick vuole controllare il loro moto fra due rintocchi consecutivi del campanile di Pisa e osserva che:

- al primo rintocco, le due lancette non sono sovrapposte;
- al rintocco successivo, quindi dopo esattamente un'ora,
 - la lancetta più corta ha fatto più di 2 ma meno di 3 giri in senso orario;
 - le due lancette si sono sovrapposte 4 volte.

- È possibile che la lancetta più lunga sia ferma?
- Dopo un'ora quanti giri può aver fatto la lancetta lunga?
- Durante un minuto (di tempo vero scandito dal campanile di Pisa), la lancetta più veloce di quanto può essersi spostata?

Esercizio 3. Una scacchiera $n \times m$ (in figura quella 3×5) contiene $nm - 1$ piastrelle quadrate ed uno spazio vuoto (in nero nella figura). Una *mossa* è lo spostamento di una piastrella in un quadrato adiacente (che deve essere necessariamente vuoto).



- Mostrare che per spostare lo spazio vuoto dalla posizione (h, k) alla posizione $(h + p, k + q)$ il numero minimo di *mosse* è $|p| + |q|$.
- Nel caso di scacchiera 3×5 determinare il minimo numero di *mosse* per portare una piastrella dalla posizione $(1, 1)$ alla posizione $(3, 5)$ nel caso in cui lo spazio vuoto si trovi inizialmente in $(2, 1)$ e nel caso in cui lo spazio vuoto si trovi inizialmente in $(1, 2)$.
- Nel caso di scacchiera 3×5 , sapendo che lo spazio vuoto potrebbe inizialmente trovarsi in una qualsiasi casella diversa da $(1, 1)$, determinare il *Valor Medio* del numero minimo di *mosse* per spostare una piastrella dalla posizione $(1, 1)$ alla posizione $(3, 5)$.