Prova di matematica

2 settembre 2016

Il candidato svolga quattro dei cinque esercizi.

Esercizio A
Il parallelogramma è un quadrilatero avente lati opposti paralleli. Si dimostri che per ogni parallelogramma del piano:
1. i lati opposti hanno la stessa lunghezza;
2. gli angoli opposti sono uguali;
3. le diagonali si intersecano nel loro punto medio.
4. Dato un generico parallelogramma P, sia C^+ il quadrato costruito su lato maggiore e C^- il quadrato costruito su un lato minore. Confrontare le aree di P, C^+ e C^-.

Esercizio B
Si rappresenti nel piano cartesiano la seguente funzione reale

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

e si determinino al variare del parametro reale k il numero di soluzione ammesse dall'equazione

$$f(x) = k\,.$$

Esercizio C
Giulio e Marco, due giocatori di pallacanestro, si sfidano ad una gara di tiri liberi. Ogni canestro vale un punto. La probabilità che Giulio segni un canestro è $p = 0,8$ ed ogni tiro libero è indipendente dai precedenti. La probabilità che Marco segni il primo canestro è $q = 0,7$. Per ogni tiro successivo la probabilità che Marco segni diventa $q' = 0,9$ se il tiro precedente è andato a canestro e $q'' = 0,6$ altrimenti. Giulio e Marco hanno tre tiri liberi ciascuno e non si influenzano a vicenda durante la competizione. Si determini:
1. La probabilità che Giulio segni tre punti; che segni almeno due punti; che segni nei primi due tiri.
2. La probabilità che Marco non segni alcun punto; che segni almeno un punto; che segni negli ultimi due tiri.
3. La probabilità che Marco vinca la gara con tre punti di scarto.

Esercizio D
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la seguente funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2)\ ,$$

con x_1 e x_2 due numeri reali. Essa può essere pensata come una trasformazione del piano perchè trasforma punti in punti.
1. Calcolare l'immagine del punto $(1, 2)$.
2. Determinare, se esiste, un elemento (x_1, x_2) tale che $f(x_1, x_2) = (0, 0)$.
3. Verificare che per ogni coppia di punti (x_1, x_2), (y_1, y_2) in $\mathbb{R}^2$, e per ogni k in $\mathbb{R}$ si ha che:
a) $f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$; b) $f(kx_1, kx_2) = kf(x_1, x_2)$.

Esercizio E
Si consideri un'impresa XYZ che produce un bene il cui prezzo unitario di vendita è determinato dalla seguente funzione di domanda di mercato

$$p = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

dove q è la quantità di bene prodotto. Non vi sono scorte o beni invenduti e l'impresa puo' produrre una qualsiasi quantità positiva di bene. Se ad esempio l'impresa decide di produrre una quantità $q = 4,91$ il prezzo di vendita per unità di prodotto è $p = \frac{1}{\sqrt{4{,}91}}$. Al contempo nel processo produttivo l'impresa deve sostenere dei costi legati alla quantità di bene prodotti e pari a $2q$. Se $q = 0$, l'impresa realizza profitti nulli.
1. Scrivere la funzione π che descrive il profitto, e determinare: a) l'intervallo delle quantità per cui è definita; b) l'intervallo delle quantità per cui è positiva.
2. Determinare, se esiste, la quantità che rende massimo il profitto.
3. Il teorema di Weierstrass stabilisce che "Ogni funzione f definita e continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ammette in tale intervallo massimo e minimo valore". Commentare il risultato di cui al punto precedente alla luce del teorema. Cosa cambierebbe se i costi fossero descritti dalla funzione $\frac{\sqrt{q}}{2}$ invece che $2q$?