

**SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA**

**Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Matematica - 28/08/2018**

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ognuno dei 3 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Esercizio 1. Lo stato di Santannaland utilizza come moneta nazionale il Piso e la Banca Centrale ha deciso di stampare banconote di soltanto due tagli. Si tenga conto che:

- a) tutti i beni hanno un prezzo intero, compreso tra 1 e 100 (estremi compresi);
 - b) i beni hanno prezzi uniformemente ripartiti e la stessa probabilità di essere acquistati;
 - c) i pagamenti vengono fatti in contanti per la cifra esatta e senza ricevere resto;
 - d) ogni cittadino possiede banconote dei due tagli in gran quantità, sicuramente sufficienti a fare gli acquisti.
1. Determinare la scelta dei due tagli di banconote che rende minimo in media il numero di banconote necessario per gli acquisti.
 2. Discutere la questione precedente nel caso generale in cui i prezzi dei beni siano compresi tra 1 ed N , con N intero qualsiasi, lasciando uguale a due il numero di tagli di banconote da stampare.

Esercizio 2. Nello stato di Santannaland la patente a punti, segue le seguenti regole:

- a) al tempo 0 tutte le patenti hanno 20 punti;
- b) ad ogni infrazione la patente viene decurtata di un punto;
- c) se la patente arriva a 0 punti, la patente viene sospesa;
- d) dopo un tempo L dall'ultima infrazione, i punti vengono riportati al valore massimo che la persona ha avuto nell'arco della sua vita;
- e) se dall'ultimo istante in cui i punti sono stati riportati al loro massimo o dal tempo 0 è trascorso un tempo L senza infrazioni, allora il massimo viene innalzato di 2 punti.

Supponiamo che ogni persona commetta un'infrazione ogni tempo T . Per cercare di massimizzare i loro punti, 2 amici, in maniera fraudolenta, scelgono di comunicare chi tra loro ha compiuto l'infrazione e a cui verranno decurtati quindi i punti, nel modo per loro più conveniente.

1. Assumendo che i due amici adottino la strategia per loro più conveniente, quali sono i valori di T che permettono di non sospendere alcuna patente?
2. Nel caso in cui gli amici che si mettono d'accordo sono n , quali sono i valori di T che permettono di non sospendere alcuna patente?

Esercizio 3. Un'azienda del centro Italia produce mattonelle quadrate di lato 9 cm al prezzo k_1 ciascuna o una loro variante di lato 9,5 cm al prezzo unitario $k_2 > k_1$. La pavimentazione di una stanza consiste nel ricoprire l'intero suolo della stanza, con mattonelle o loro ritagli. La pavimentazione deve rispettare le seguenti regole:

- a) se due mattonelle si toccano allora o si toccano per un angolo oppure hanno in comune un intero lato;
- b) solo al bordo della stanza possono essere usati ritagli di mattonelle;
- c) tra il muro ed una mattonella intera può essere usato al più un ritaglio;
- d) una mattonella può essere tagliata più volte.

A causa del consumo della lama della taglierina, ogni taglio ha un prezzo k_3 . Un architetto deve fare pavimentare una stanza quadrata di lato 6 m e deve scegliere se acquistare mattonelle standard da 9 cm di lato oppure la variante da 9,5 cm di lato.

1. Calcolare il costo minimo per pavimentare la stanza con mattonelle standard ed il costo minimo per pavimentarla con le mattonelle variate e stabilire sotto quali ipotesi su k_1 , k_2 , k_3 la prima soluzione è più conveniente;
2. Se ad ogni taglio c'è una probabilità dell'1% di rompere la mattonella (e doverla buttare via) a quanto ammonta il costo atteso della pavimentazione con mattonelle standard?

SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Fisica e Problem Solving
29/08/2018

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ognuno dei 3 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Esercizio 1. Un piano inclinato di massa M ed inclinazione α e dotato di ruote è libero di scorrere liberamente senza attrito su un piano orizzontale. Dalla sua sommità ad altezza H viene lasciato rotolare un disco di massa m e raggio R .

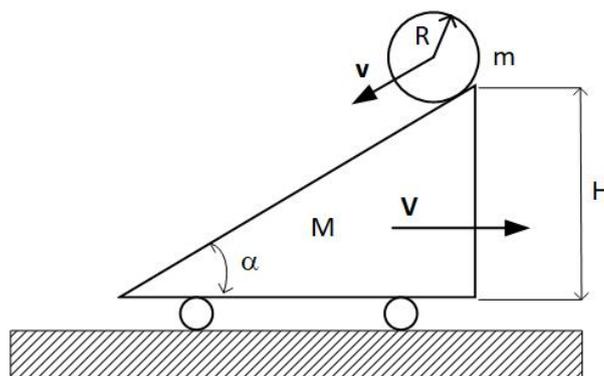


FIGURA 1

Nell'ipotesi che il disco rotoli senza strisciare sul piano inclinato:

1. Calcolare la velocità v del disco e V del piano inclinato quando il disco ha raggiunto la base del piano inclinato.
2. Discutere la soluzione nei due casi limite di $M \rightarrow 0$ ed $M \rightarrow \infty$.

Successivamente il piano viene decelerato fino ad arrestarsi con decelerazione costante a .

3. Discutere in funzione della decelerazione a il moto del disco m .

Esercizio 2.

Un contenitore cilindrico di raggio R ed altezza H è riempito con un volume V di liquido avente densità σ . Il contenitore è messo in rotazione attorno all'asse verticale con velocità angolare ω . Si calcoli in funzione dei parametri dati:

1. il profilo della forma assunta dal liquido a regime;
2. la velocità ω per cui il liquido fuoriesce dal contenitore;
3. la velocità ω per cui il fondo del contenitore si scopre.

Esercizio 3. La Figura 2 mostra lo schema a blocchi di una catena di acquisizione ed elaborazione dell'elettrocardiogramma ossia di un segnale temporale che descrive il battito cardiaco.

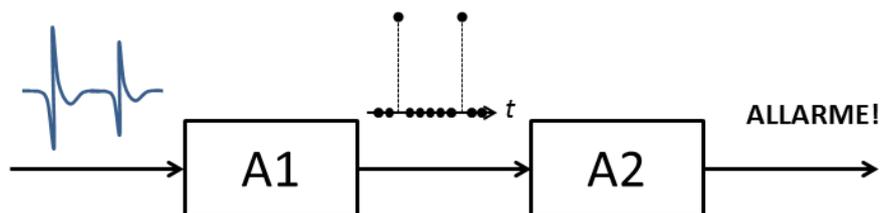


FIGURA 2

In particolare, il segnale temporale in Figura 3 descrive il battito cardiaco acquisito da un sensore e può assumere valori interi nell'intervallo $[-128, 127]$.

Considerando che il segnale esibisce nel tempo una forma ripetitiva ma non periodica, e che i picchi positivi del segnale raggiungono ampiezze diverse:

- (1) si descriva schematicamente la sequenza di passi da effettuare, ad ogni intervallo temporale Δt (iterativamente), per trasformare il segnale in Figura 3 in un segnale digitale, ossia una serie temporale di 0 (zeri) e 1 (uni), come indicato in Figura 4. Si noti che i picchi positivi del segnale in Figura 3 corrispondono agli 1 del segnale in Figura 4.

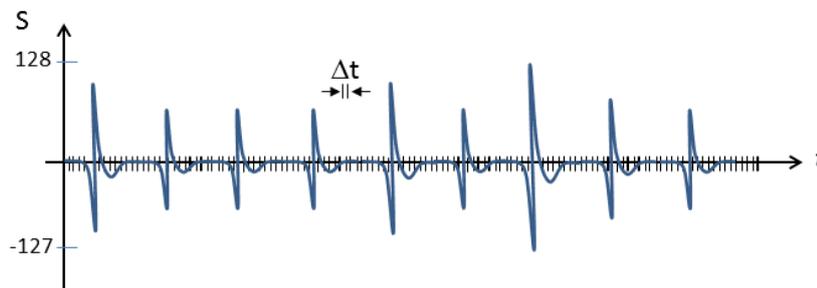


FIGURA 3

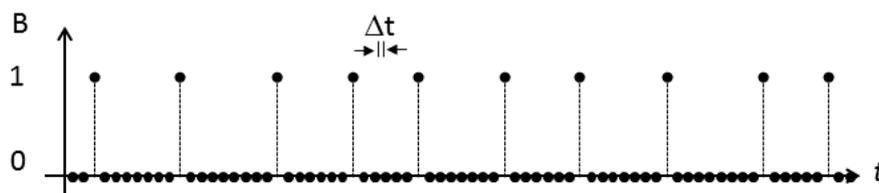


FIGURA 4

Per il segnale processato come in Figura 4, si scriva un elenco di istruzioni elementari da eseguire ad ogni intervallo temporale Δt , che

- (2) calcoli la frequenza F dell'occorrenza degli 1;

- (3) generi un allarme di frequenza troppo bassa (se $F < 0.5$ Hz) o troppo alta (se $F > 2.2$ Hz).

Per le descrizioni richieste è possibile utilizzare anche le seguenti funzioni:

1. **LeggiSegnale:** Restituisce il valore del sensore compreso nell'intervallo $[-128, 127]$, ad esempio:

```
Letture = LeggiSegnale // mette in lettura il valore di lettura del sensore
```

2. **LeggiTempo:** Restituisce il tempo dall'accensione del sistema in millisecondi. ad esempio:

```
Variabile = LeggiTempo // mette in Variabile  
il tempo al dato istante
```

3. **Allarme_ALTO:** Per segnalare che la frequenza è troppo alta

4. **Allarme_BASSO:** Per segnalare che la frequenza è troppo bassa

Durante lo svolgimento si discutano le scelte implementative.