

SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Matematica - 26/08/2020

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ciascun esercizio deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Si ricorda di usare per la scrittura, pena esclusione, solamente ed esclusivamente la penna fornita in dotazione dalla commissione.

Esercizio 1. Un albero del Sant'Anna è cresciuto secondo le seguenti regole:

- il tronco è un segmento verticale di lunghezza 1 metro ed il tronco si considera un ramo;
- alla fine di ogni ramo di lunghezza ℓ , dipartono due rami di lunghezza $\rho \times \ell$, con $\rho \in [0, 1]$;
- i due rami che dipartono da uno stesso ramo formano un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ fra di loro, ogni ramo forma quindi un angolo $\pi - \frac{\alpha}{2}$ con il ramo da è stato originato;
- si definisce *profondità* di un ramo il numero di giunzioni che è necessario attraversare per giungere fino al tronco. Il tronco ha quindi profondità 0.

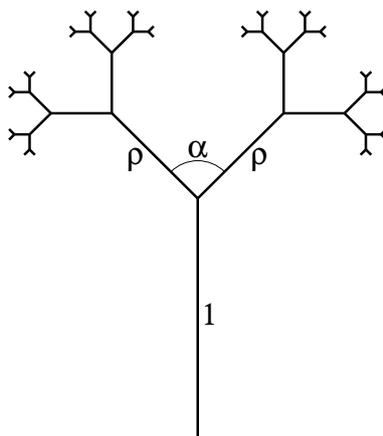


FIGURA 1. Un esempio di albero con rami di profondità fino a 5 e con $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$.

- Con $\alpha = \pi$, determinare tutti i valori di ρ per cui l'albero "tocca terra" in un punto diverso dal tronco.
- Con $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quale è l'altezza massima, in funzione di ρ ?
- Dato un punto arbitrario del piano, trovare, se esiste, una coppia di valori (α, ρ) tale che il punto appartenga all'albero costruito con tali valori.

Esercizio 2. Siano a, b due numeri scelti a caso nell'intervallo $[0, 1]$.

(a) Determinare la probabilità p_3 che il polinomio

$$P_3(x) = x^3 - ax + b$$

abbia tre radici reali distinte.

(b) Per ogni intero $n \geq 3$ determinare la probabilità p_n che il polinomio

$$P_n(x) = x^n - ax + b$$

abbia tre radici reali distinte.

(c) Calcolare il limite delle probabilità

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n+1}.$$

Esercizio 3. Un'aula deve essere riconfigurata per il rientro durante una pandemia e si decide che ogni studente deve distare da ogni altro almeno 2 metri. Si considera ogni studente come un punto, da posizionare opportunamente nell'aula, incluso sulle linee che rappresentano i muri.

(a) È possibile mettere in un'aula quadrata di lato $2n$ metri più di $(n+1)^2$ studenti? Se sì per quali n ?

(b) Per la cattedra e la lavagna è necessario lasciare una striscia verso i banchi, di almeno 2 metri sul corrispondente lato dell'aula (il lato e la larghezza della striscia possono essere scelti). Tra le aule rettangolari di area 36 m^2 e con lati di almeno 4 metri, quale contiene più studenti? Quanti studenti ci si possono sedere e con che configurazione? Quanto sarà larga la striscia?

SCUOLA SUPERIORE SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Fisica e Problem Solving
27/08/2020

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ognuno dei 4 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Si ricorda di usare per la scrittura, pena esclusione, solamente ed esclusivamente la penna fornita in dotazione dalla commissione.

Esercizio 1. La roulette La roulette di Figura 1 è costituita da un disco centrale di raggio $r = 30\text{ cm}$ con diversi settori circolari in rotazione con velocità angolare costante Ω , e da un bordo conico fisso circolare con inclinazione pari ad un angolo $\alpha = 45^\circ$ e spessore $l = 3\text{ cm}$. Viene lanciata dal bordo conico una pallina puntiforme di massa $m = 10\text{ g}$ nella stessa direzione di movimento del disco centrale con velocità iniziale v_0 , da una posizione opposta alla casella rossa 2 indicata in figura. Tenendo conto di un attrito dinamico $\mu_d = 0.7$ tra la pallina ed il bordo conico e della presenza della forza di gravità g :

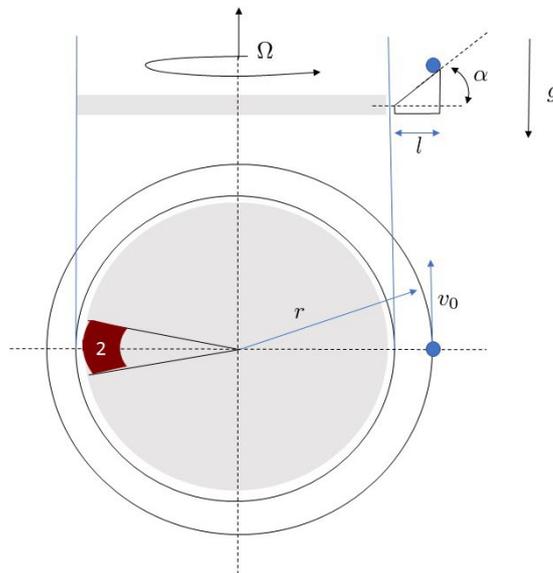


FIGURA 1

1. Si determini la relazione tra le velocità angolare Ω e e la velocità iniziale della pallina v_0 per le quali si è in grado di far sì che la pallina sia deposta nel settore circolare rosso numero 2 in figura dopo $N = 2$ giri della ruota dal lancio.
2. Si illustri un metodo analitico per determinare i valori possibili delle velocità Ω e v_0 che soddisfino le relazioni di cui sopra.

Si consideri la pallina come una massa puntiforme e si trascuri l'effetto del rotolamento della pallina sulla pista.

Esercizio 2. La resistenza equivalente Sia dato un circuito elettrico costituito da una serie infinita di rami di resistenza R disposti secondo le due configurazioni 1) e 2) in figura.

Si calcoli la resistenza equivalente misurata tra i punti A e B nel caso 1) e nel caso 2).

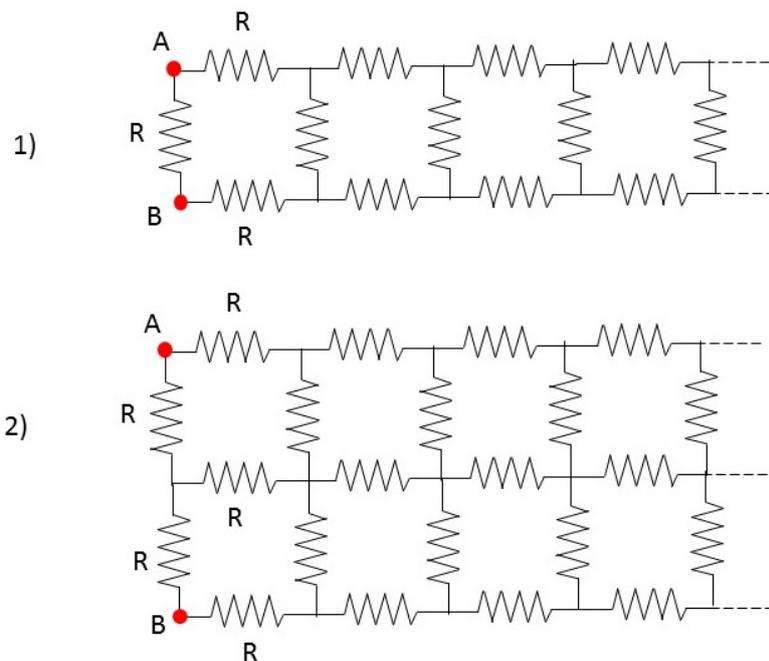


FIGURA 2

Esercizio 3. L'attuatore pneumatico Il laboratorio di robotica dell'Università di Frittole deve sviluppare un componente pneumatico in grado di contrarsi (un attuatore) quando viene pressurizzato con un gas. Per lo sviluppo di questi componenti, i ricercatori decidono di usare delle camere d'aria elastiche e dei cilindri a fibre intrecciate (mostrati nella figura a sinistra).

Le fibre intrecciate sono disposte elicoidalmente sul cilindro formando un angolo θ rispetto all'asse longitudinale e compiendo un giro attorno al cilindro. Quando la camera d'aria viene fissata all'interno del cilindro e pressurizzata, la camera d'aria aumenta di volume e la sua deformazione è guidata dalla deformazione del cilindro a fibre intrecciate in virtù della variazione dell'angolo θ (come esemplificato nella figura a destra).

Sapendo che le fibre hanno tutte lunghezza $b = 1\text{ m}$ e assumendo che:

- le fibre siano inestensibili
- non ci sia attrito fra le fibre e fra le fibre e la camera d'aria
- la forza elastica necessaria per deformare la camera elastica e le fibre sia trascurabile
- l'attuatore rimane sempre di forma cilindrica anche durante le deformazioni

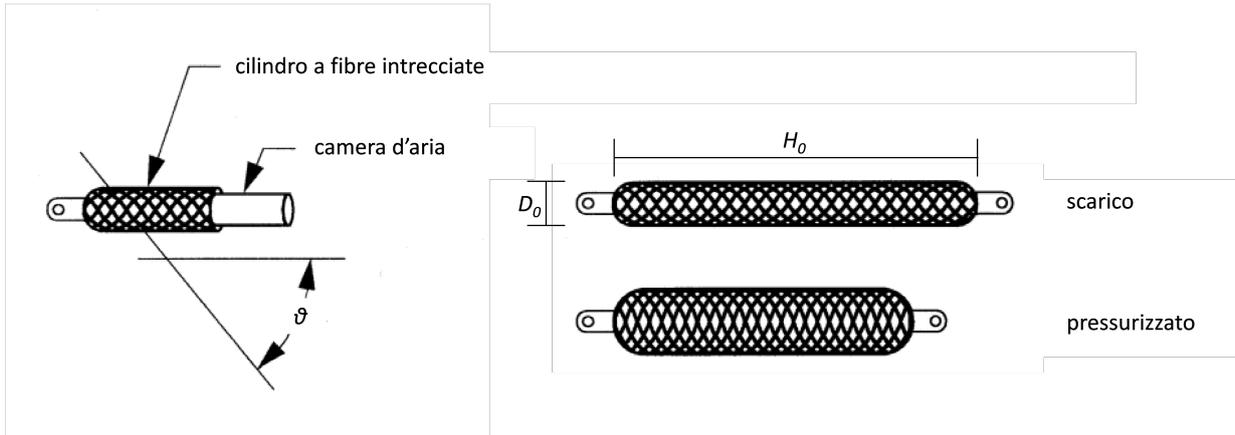


FIGURA 3

a) Si determini il valore limite del diametro D_0 e dell'altezza H_0 del cilindro a fibre intrecciate in condizione scarica tale per cui l'attuatore raggiunga il suo massimo volume possibile, per cui non sia più in grado di contrarsi quando è pressurizzato.

b) Si consideri che l'attuatore venga quindi fabbricato con le fibre disposte con un angolo iniziale θ_0 uguale a 30° e collegato (come mostrato in figura) ad una molla con costante elastica $k = 0.05 \text{ N/m}$. Considerando di insufflare l'attuatore con una pressione $p = 1 \text{ Pa}$, si determini l'allungamento che subirà la molla.

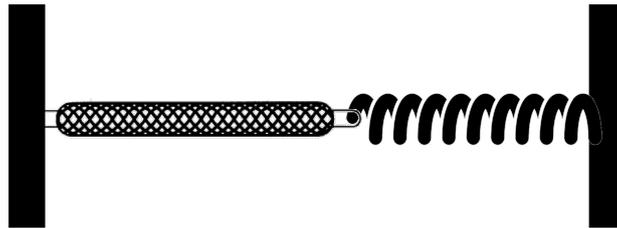


FIGURA 4

Esercizio 4. Il sottopassaggio

Il Comune di Poggio Verde ha deciso di dotare il sottopassaggio stradale di Vicolo Stretto con un semaforo intelligente di ultima generazione.

La strada è a senso unico, ma poiché il sottopassaggio è molto stretto è possibile il passaggio esclusivo solo di un veicolo o di un pedone. E' quindi necessario un semaforo che regoli il passaggio limitando al minimo il tempo in cui il semaforo per i veicoli resta rosso, ma solo nel caso in cui non fossero presenti pedoni che non possono ingombrare la zona antistante il passaggio per questioni di sicurezza. Ecco perché è stato deciso di dotarsi un semaforo equipaggiato di un sensore in grado di riconoscere la presenza dei pedoni nel sottopassaggio.

Si chiede quindi di progettare tale soluzione, e definire le regole per il corretto funzionamento secondo i seguenti punti:

- (1) Il sensore che rileva la presenza di pedoni è orientabile e va posizionato su di un palo alto 2.5 m. Sapendo che il sensore ha un campo di vista (si consideri una piramide a base quadrata) con angolo di 60° e che il sottopassaggio è largo 2 m ed alto 3 m e profondo 2 m, si posizioni il palo il più vicino possibile al passaggio, ma sufficientemente lontano da poter "inquadrare" dalla testa ai piedi un pedone

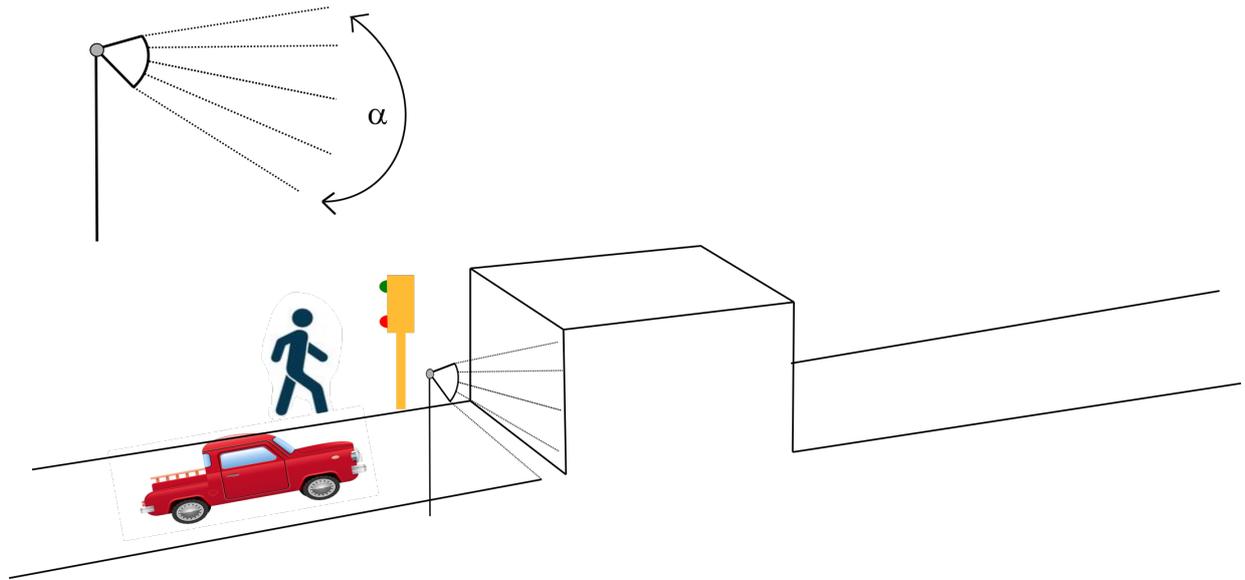


FIGURA 5

che cammina in qualsiasi punto della strada nel sottopassaggio. (si consideri un sensore che funziona perfettamente in tutto il campo di vista, senza problemi di attenuazione del segnale con la distanza)

- (2) Il sistema di controllo dei semafori (a due luci per semplicità e dotato di un bottone per la chiamata del passaggio pedonale) dispone delle funzioni di seguito illustrate. Si scriva la sequenza di operazioni necessarie per gestire il traffico.

Per le descrizioni richieste è possibile utilizzare le seguenti funzioni:

1. **SetPedestrianLight("color")**: imposta il colore della luce del semaforo per i pedoni al valore "color" che può assumere valori "red", "green".
2. **SetVehicleLight("color")** imposta il colore della luce del semaforo per i veicoli al valore "color" che può assumere valori "red", "green".
3. **ButtonState = ReadButton()**: legge se il bottone di richiesta passaggio pedone è in stato "on" oppure "off". Restituisce il valore 1 nel primo caso, 0 altrimenti.
4. **ResetButton()**: porta il bottone per il passaggio pedonale in stato "off"
5. **SensorState()**: funzione che restituisce il valore 1 se è rilevato almeno un pedone nel sottopassaggio, altrimenti restituisce il valore 0
6. **Wait(S)**: sospende le operazioni per S secondi.

Durante lo svolgimento si discutano le scelte implementative.